TD$_6$ – Suites et séries

Exercice 1 ★★

Déterminer les limites des suites suivantes

1. $u_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \dfrac{n \sin n}{1 + n^2}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n}$
4. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
5. $u_n = n^2 \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$
6. $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
7. $u_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Exercice 2 ★★

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1$.
3. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 3 ★★★

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes

1. $u_n = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3 - n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n}{2^n}\right)\right)$.
4. $z_n = \dbinom{n}{k}$

Exercice 4 ★★★

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, et soit $v_n = \left(1 + \dfrac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n}$.
Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$, puis en déduire la limite de (v_n).

Exercice 5 ★★

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Montrer que (v_n) est convergente, et déterminer un équivalent simple de v_n.

Exercice 6 ★★

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2}$;
2. $u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n}$ (on ne cherchera pas de valeur pour la limite) ;
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

Exercice 7 ★★★

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $[0,1]$ par : $P_n : x \mapsto x^n - (1-x)a$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.
3. Notons ℓ la limite de la suite (x_n). Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 8 ★★

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$

1. $u_n = \dfrac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$
4. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
6. $u_n = \ln\left(2 - e^{1/n}\right)$
7. $u_n = \dfrac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+n^2}}$
8. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - \cos\dfrac{\pi}{n}$
9. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$
11. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$
12. $u_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$
13. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - \cos\dfrac{\pi}{n}$
14. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
15. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$
16. $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(4n)!}$

Exercice 9 ★★★

Soit $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n, selon le/les paramètre(s) :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}(\sin a)^{2n}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$;
3. $u_n = \dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$.
4. $u_n = \exp(-\ln(n)^\alpha)$
5. $u_n = \sqrt{e^{n^\alpha} - 1}$

Exercice 10 ★★★

Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+n^5}}\mathrm{d}x$ puis $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$

Exercice 11 ★★

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in]0,1[$ et φ une fonction continue. Déterminer si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme

1. $\sum \frac{3^{2n+1}}{n!}$
2. $\sum n 2^{n-1}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$
4. $\sum n \frac{3^n}{4^{n+1}}$
5. $\sum \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$.
6. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
7. $\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$
8. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$
9. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n!}$
10. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$
11. $\sum \int_0^a t^n \varphi(t)\mathrm{d}t$
12. $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 12 ★★

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n^2$ converge ;
2. $u_n \to 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge ;
3. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$;
4. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 13 ★★★

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 14 ★★★

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\mathrm{d}t$.

1. Trouver une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 15 Série harmonique et constante d'Euler. ★★★

Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 16 ★★

Pour $n \geqslant 1$, soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2 - 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge

3. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{k}{4k^2-1} = \dfrac{a}{2k+1} + \dfrac{b}{2k-1}$.
4. En déduire la somme de la série $\sum u_n$

Exercice 17 ★★★

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 18 ★★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^t \ln(t)$ est intégrable et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2019*)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Indication : étudier $f_{n+1}(x_n)$ et exprimer $\frac{1}{2}$ en fonction de x_n.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2019*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier la convergence de la suite u et déterminer son éventuelle limite.
2. Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$
3. Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n$ sont de même nature
4. En déduire la nature de $\sum u_n$

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2018*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1. Est ce que la série $\sum u_n$ est absolument convergente ?
2. (a) Calculer $\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

   (b) En déduire que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme
3. Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une approximation de π à 10^{-2} près ?

Exercice 22 ★★★★★

(*Oral 2014,2018*)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,\pi[$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$
3. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $g(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
4. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Puisque $(-1)^n \underset{+\infty}{=} o(2^n)$, il vient $2^n + (-1)^n \underset{0}{=} 2^n + o(2^n) \underset{+\infty}{\sim} 2^n$.
   De même, on a $3n + (-1)^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} 3n$ et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{3n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
2. Puisque $|\sin n| \leqslant 1$, il vient $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{n}{1+n^2}$.
   Mais $\dfrac{n}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Ainsi, le théorème des gendarmes, on a donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. On a $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Or, par croissance comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 = 1$.

⚠Attention
Il y a ici un piège très classique : 1^∞ est une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on repassera toujours par la forme exponentielle : $a^b = e^{b\ln(a)}$.

4. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, il faut passer par la forme exponentielle :
   $$u_n = e^{(n+2)\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}.$$
   Or, $(n+2)\ln\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2(n+2)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} -2 \underset{n\to+\infty}{\to} -2$.
   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-2}$.
   Alternative : si on ne voit pas que $\dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$, il est possible de remarquer que $\dfrac{n-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
   Et donc
   $$\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n+1} - 1 = -\frac{2}{n+1}.$$
5. Un développement limité à l'ordre 2 du cosinus en 0, ce qui est légitime ici car $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ nous indique que $\cos\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Et de même,
   $$\cos\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Par conséquent,
   $$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} \underset{0}{=} \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Après multiplication par n^2, il vient
   $$u_n = \underbrace{\frac{-2n^3-n^2}{2n^2(n+1)^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} + \underbrace{o(1)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Détails
Puisque $\dfrac{1}{(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, on a
$$o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul : $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. En revenant à la forme exponentielle, on a $u_n = \exp\left(n^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
   Or, puisque $\cos\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, on a donc
   $$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \cos\frac{1}{n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Détails
On a utilisé ici le fait que lorsque $u \to 1$, $\ln(u) = \ln(1+(u-1)) \underset{u\to1}{\sim} u-1$.

Et donc $n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Par continuité de l'exponentielle,on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

> **Remarque**
> Le fait que si $u_n \to \ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$ n'est vrai que si f est continue en ℓ. Il ne faut alors pas oublier de le mentionner.

7. On a $3n^2 + (-1)^n \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$.

   D'autre part, $\sqrt{n^2+2} \underset{+\infty}{\sim} n$ et donc $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\sqrt{n^2+2}\right)$.

   On en déduit donc que $\sqrt{n^2+2} + \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n^2+2} \underset{+\infty}{\sim} n$.

   Par conséquent, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3n^2}{n}$, donc $u_n \to +\infty$.

> **Détails**
> Par définition, on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Puisque $u_{n+1} = u_1 + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}$, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.
   Montrons donc par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n > u_1$.

   Initialisation :

   Pour u_1, c'est une hypothèse faite par l'énoncé.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \leqslant n$, $u_k \geqslant 0$. Alors

   $$u_{n+1} = u_1 + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n} \geqslant 0.$$

   Et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$, de sorte que

   $$u_n = u_1 + \underbrace{\frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{n-1}}_{\geqslant 0} \geqslant u_1.$$

> **Réc. forte**
> Ici, pour prouver que $u_{n+1} \geqslant 0$, nous n'utilisons pas seulement $u_n \geqslant 0$, mais $u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0, \dots, u_n \geqslant 0$.
> Il ne s'agit donc pas d'une récurrence simple, mais d'une récurrence forte : on suppose que la propriété est vérifiée pour **tous les termes** d'ordre inférieur ou égal à n, et on la montre pour le terme d'ordre $n+1$.

2. On a immédiatement, pour tout $n \geqslant 2$,

   $$u_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{n-1} \geqslant u_1 + \frac{u_1}{2} + \cdots + \frac{u_1}{n-1} = u_1\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right).$$

3. Nous savons que la série harmonique, de terme général $\frac{1}{k}$, est divergente.
   Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante.

   N'étant pas convergente, elle tend donc vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$.

   Et donc en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = +\infty$.

   Et puisque $u_1 > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) = +\infty$.

   En raison de l'inégalité prouvée à la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Notons que $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Et donc il vient

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

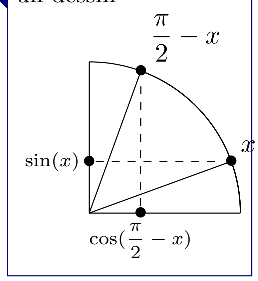
2. On a $v_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)$.
   Or, nous savons que $(1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1+\alpha u + o(u)$. Donc
   $$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} &\underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \frac{5}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{6n^2}.\end{aligned}$$
   Et donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{6n}$.
3. Commençons par noter que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{n}{2^n}\right)$.

   Trigo

   Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule

   $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$

   peut se retrouver sur un dessin

   Puisque $n \underset{+\infty}{=} o(2^n)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$.
   On en déduit donc que
   $$w_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$
4. Par définition, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
   Le numérateur est alors un produit de k termes, avec k fixé. C'est un polynôme de degré k, dont le coefficient dominant (i.e. le terme en n^k) vaut 1.
   Et donc

   Remarque

   Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

   $$n(n-1)\cdots(n-k+1) \underset{+\infty}{\sim} n^k.$$
   On en déduit que $z_n = \binom{n}{k} \underset{n}{\sim} +\infty \frac{n^k}{k!}$.

Corrigé de l'exercice 4

On a $\ln(v_n) = n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - u_n = n\left(\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - \frac{u_n}{n}\right)$.
Mais puisque $u_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, et $\sqrt{n} \underset{+\infty}{=} o(n)$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(n)$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
Un développement limité à l'ordre 2 nous donne alors

$$\ln(v_n) \underset{+\infty}{=} n\left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right) - \frac{u_n}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(-\frac{u_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -n\frac{u_n^2}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2n}.$$

Mais puisque $u_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, alors $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o(n)$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{n} = 0$.
On en déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = 0$.
Et alors, par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^{\ln(v_n)} = e^0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 5

Détails

On utilise l'équivalent usuel $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$. Notons que pour l'utiliser, il était indispensable de s'assurer que la quantité dans l'exponentielle tend bien vers 0.

Pour $x \in [0,1]$ on a $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$, ainsi, par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour obtenir un équivalent on va effectuer une intégration par parties.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}J_n$$

où $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

De la même manière que précédemment on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}(n+3)} \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+3}$$

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0, en d'autres termes $J_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, d'où

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)}$$

Corrigé de l'exercice 6

1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	↗	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	↘	0

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ d'où $|2x| \leqslant 1+x^2$ et donc $f(x) \in [-1,1]$.

On en déduit alors que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [-1,1]$.

Comparons, pour $x \in [-1,1]$, $f(x)$ et x, on a

$$\forall x \in [-1,], \qquad f(x) - x = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

Trois cas sont alors possibles :

— Si $u_0 > 0$, dans ce cas $u_1 \in]0,1]$ et $u_2 = f(u_1) > u_1$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et majorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell > 0$.

— Si $u_1 < 0$, dans ce cas $u_1 \in [-1,0[$ et $u_2 = f(u_1) < u_1$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell < 0$.

— Si $u_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$

Dans tous les cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [-1,1]$.

La fonction f étant continue on a alors $\ell = f(\ell)$ i.e. $\ell = \dfrac{2\ell}{1+\ell^2}$

On a donc $\dfrac{\ell(\ell^2-1)}{1+\ell^2} = 0$ donc $\ell \in \{0,1,-1\}$

Finalement

— Si $u_0 > 0$, dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et elle converge vers 1

— Si $u_0 < 0$, dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et elle converge vers -1

— Si $u_1 = 0$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 0$

2. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - t$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. D'après le théorème de la bijection continue f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle ne s'annule donc qu'une seule fois en un réel ℓ.

   Or $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$ donc $f(e^{-1}) = \exp(-\mathrm{e}^{-1}) - \mathrm{e}^{-1} > 0$ et ainsi $\ell \in [\mathrm{e}^{-1}, 1]$.

   Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a clairement $u_n > 0$, ainsi, pour $n \geqslant 2$ on a $u_n \in]0,1[$, d'où

$$\forall n \geqslant 3, \qquad u_n \in]\mathrm{e}^{-1}, 1[$$

   Soit $x \in]\mathrm{e}^{-1}, 1[$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquées à $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ on a

$$\left|\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\ell}\right| \leqslant \sup_{t\in[\ell,x]} |-\mathrm{e}^{-t}||x-\ell| \leqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}|x-\ell|$$

   Par une récurrence aisée on a alors

$$\forall n \geqslant 3, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \mathrm{e}^{-(n-3)e^{-1}}|u_3 - \ell|$$

   D'où, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

   Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, alors par continuité de la fonction $t\mapsto \dfrac{1+t}{1-t}$ on aurait $\ell = \dfrac{1+\ell}{1-\ell}$, d'où $\ell^2+1 = 0$ ce qui est absurde. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas.

   De plus pour $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1 + 2}{1-u_n} = -1 + \dfrac{2}{u_n - 1}$. Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une limite infinie alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers -1 ce qui est absurde.

   Finalement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

   On pourrait éventuellement poursuivre l'étude en considérant $v_n = \dfrac{u_n - i}{u_n + i}$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ce qui permet de déterminer v_n puis u_n.

Corrigé de l'exercice 7

1. P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et , pour $x\in]0,1[$ on a

$$P_n'(x) = nx^{n-1} + a > 0$$

   Ainsi P_n est strictement croissante sur $]0,1[$. De plus $P_n(0) = -a < 0$ et $P_n(1) = 1 > 0$, ainsi, d'après le théorème de la bijection continue, P_n établit une bijection de $]0,1[$ vers $]-a,1[$.

   Ainsi P_n ne s'annule qu'une seule fois sur $]0,1[$ en $x_n = P_n^{-1}(0)$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $x_n^n = (1-x_n)a$, d'où

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (1-x_n)a = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

   La fonction P_{n+1} est strictement croissante, $P_{n+1}(x_n) < 0$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, ainsi $x_n \leqslant x_{n+1}$.

   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante, elle est de plus majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l\in[0,1]$

3. Supposons par l'absurde que $l < 1$. Par croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant l < 1$, ainsi $0 \leqslant x_n^n \leqslant l^n$. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n - (1-x_n)a = 0 - (1-l)a = (1-l)a$

   Or $x_n^n - (1-x_n)a$ d'où, par unicité de la limite, $0 = (1-l)a$ et donc $l = 1$ ce qui est absurde.

   finalement $l = 1$.

Corrigé de l'exercice 8

1. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$.

   Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, et puisque $u_n \geqslant 0$, d'après le critère des équivalents, $\sum\limits_n u_n$ diverge également.

2. On a $|u_n| = \dfrac{n+2}{n^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
   Ainsi, par le critère de comparaisons des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.
   Par conséquent $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

Méthode
Pour une série dont le terme général n'est pas de signe constant, on commencera toujours pas s'intéresser à la convergence absolue.

3. Cherchons $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$n^\alpha u_n = \frac{\ln^2 n}{n^{2-\alpha}}.$$

   Par croissances comparées, cette quantité tend vers 0 si et seulement $2-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$.
   Donc par exemple, pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$, on a $n^{3/2}u_n \to 0$.

   Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge par critère de Riemann car $\dfrac{3}{2} > 1$

   D'où, par critère de négligeabilité, $\sum u_n$ converge.

4. Commençons par déterminer la limite de u_n car il n'est pas évident que celle-ci soit nulle.
   On a

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}} = e^{n\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

   Or, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, et donc

$$n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -n\sqrt{n}\frac{1}{n\sqrt{n}} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

   Par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0$.
   Et donc la série de terme général u_n diverge grossièrement.

5. On a $nu_n = \dfrac{1}{n^{1/n}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n)}$.

   Or, $\dfrac{1}{n}\ln n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et donc $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$. Par conséquent, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

⚠Attention
Il y a ici une grosse erreur à ne pas commettre, c'est de dire que $\sum u_n$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$, donc convergente. En effet, une série de Riemann est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$, où α est **une constante**, qui ne peut donc pas dépendre de n.

6. Lorsque $n \to +\infty$, $2 - e^{1/n} \to 1$, de sorte que

$$\ln(2 - e^{1/n}) \underset{+\infty}{\sim} 2 - e^{1/n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

   Et donc par critère de comparaison pour les séries de signe constant, la série de terme général u_n diverge.

7. Pour $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, ainsi $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$ et donc $u_n > 0$

   De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\frac{1}{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   Or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, d'où, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{n^2}\ln(n)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) - 1 + \frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Or $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge absolument (il suffit de reprendre la démarche du 3.). Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
9. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à une suite positive elle est donc positive à partir d'une certain rang.

   Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
10. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

    Ainsi, par critère de D'Alembert, $\sum u_n$ diverge (en fait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
11. Cherchons $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$n^\alpha u_n = \frac{\ln(n)}{n^{2-\alpha}}.$$

    Par croissances comparées, cette quantité tend vers 0 si et seulement $2-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$.
    Donc par exemple, pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$, on a $n^{3/2}u_n \to 0$.

    Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge par critère de Riemann car $\dfrac{3}{2} > 1$

    D'où, par critère de négligeabilité, $\sum u_n$ converge.

12. On va procéder par comparaison série-intégrale.

    Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$, f est décroissante et positive sur $[2,+\infty[$, ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

    Or, pour $A>0$ on a

$$\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(2)}$$

    Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

13. c.f. question 8.
14. Par croissance comparée on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$, ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ainsi, par négligeabilité $\sum u_n$ converge.
15. pour $n\in\mathbb{N}$ on a $nu_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

    Ainsi $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, ainsi $\sum u_n$ diverge.
16. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n>0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^3}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0<1$. Ainsi, par critère de D'Alembert, $\sum u_n$ converge.

D'Alembert

On pensera au critère de D'Alembert lorsque le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ semble pouvoir se simplifier

---

Corrigé de l'exercice 9

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{(2\sin^2(a))^n}{n^2} \geqslant 0$.

   De plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}2\sin^2(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sin^2(a) = 1-\cos(2a)$.

   Ainsi,
   - Si $\cos(2a)>0$ i.e. si $a\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ alors, par critère de D'Alembert, $\sum u_n$ converge
   - Si $\cos(2a)<0$ i.e. si $a\in\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors, par critère de D'Alembert, $\sum u_n$ diverge
   - Si $a=\dfrac{\pi}{4}$ alors $u_n = \dfrac{2^n}{2^nn^2} = \dfrac{1}{n^2}$ et donc $\sum u_n$ converge.

   Finalement $\sum u_n$ converge si $a\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.
2. On va séparer trois cas : $\alpha<1$, $\alpha>1$ et $\alpha=1$
   - Supposons $\alpha<1$, soit alors $\gamma\in]\alpha,1[$ (e.g. $\gamma=\dfrac{1+\alpha}{2}$).

     Alors $n^\gamma u_n = \dfrac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

     Ainsi $\dfrac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ diverge par critère de Riemann, ainsi $\sum u_n$ diverge.
   - Supposons $\alpha>$, soit alors $\delta\in]1,\alpha[$ (e.g. $\delta=\dfrac{1+\alpha}{2}$).

     Alors $n^\delta u_n = \dfrac{n^{\delta-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

     Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\delta}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\delta}$ converge par critère de Riemann, ainsi $\sum u_n$ converge.
   - Supposons maintenant $\alpha=1$. On va procéder par comparaison série-intégrale.

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et ,pour $t>0$ on a $f'(t) = -\dfrac{\beta+\ln(t)}{t^2\ln(t)^{\beta+1}}$. f est donc décroissante et positive sur $[\mathrm{e}^\beta,+\infty[$, ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale $\displaystyle\sum_{n\geqslant \mathrm{e}^\beta} f(n)$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^\beta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Or, pour $A>0$ on a

$$\int_{\mathrm{e}^\beta}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{-1}{\beta-1}\dfrac{1}{\ln(t)^{\beta-1}}\right]_{\mathrm{e}^\beta}^{A} & \text{si } \beta\neq 1 \\ [\ln(\ln(t))]_{\mathrm{e}^\beta}^{A} & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^\beta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta>1$ et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta>1$.

Séries de Bertrand

On appelle ces séries de séries de Bertrand, elles sont assez classiques et il est bon d'avoir une idée de comment on les étudie.

Finalement $\displaystyle\sum \frac{1}{n\alpha\ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ et $\beta>1$.

3. On va séparer les cas $|\alpha|<1$, $|\alpha|>1$ et $|\alpha|=1$
   - Si $|\alpha|<1$ alors $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |\alpha|^n$.

     Or $\sum |\alpha|^n$ est une série géométrique convergente (car $|\alpha|<1$), ainsi, par équivalence, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
   - Si $|\alpha|>1$ alors $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |\dfrac{\alpha^n}{\alpha^{2n}}| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{\alpha}\right|^n$.

     Or $\sum \left|\dfrac{1}{\alpha}\right|^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|<1$), ainsi, par équivalence, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
   - Si $\alpha=1$ alors $u_n = \dfrac{1}{2}$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement
   - Si $\alpha=-1$ alors $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2}$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

   Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $|\alpha|\neq 1$.
4. Pour $\alpha=1$ on a $\exp(-\ln(n)^\alpha) = \dfrac{1}{n}$, on reconnaît le terme général de la série harmonique dont on sait qu'elle diverge.

   Pour $\alpha<1$ on va comparer la suite $(\exp(-\ln(n)^\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ à la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On a

$$\begin{aligned}\frac{\exp(-\ln(n)^\alpha)}{\frac{1}{n}} &= n\exp(-\ln(n)^\alpha)\\ &= \exp(\ln(n)-\ln(n)^\alpha)\\ &= \exp(\ln(n)\left(1-\ln(n)^{\alpha-1}\right)\end{aligned}$$

   Or, comme $\alpha<1$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n)^{\alpha-1}=0$, ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\exp(-\ln(n)^\alpha)}{\frac{1}{n}} = +\infty$.

   On en déduit donc que $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\exp(-\ln(n)^\alpha)\right)$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge on en déduit que la série de terme général $\exp(-\ln(n)^\alpha)$ diverge également.

   Supposons enfin que $\alpha>1$, dans ce cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^\alpha}{\ln(n)} = +\infty$. En particulier il existe un rang N tel que

$$\forall n\geqslant N,\qquad \frac{\ln(n)^\alpha}{\ln(n)}\geqslant 2$$

D'où

$$\forall n \geqslant N, \qquad \exp - \ln(n)^{\alpha} \leqslant \exp -2\ln(n)$$

C'est-à-dire

$$\forall n \geqslant N, \qquad \exp - \ln(n)^{\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $(\exp - \ln(n)^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{e^{n^{\alpha}}-1} \neq 0$, la série de terme général $\sqrt{e^{n^{\alpha}}-1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge donc grossièrement.

   Si $\alpha < 0$ alors

$$\sqrt{e^{n^{\alpha}}-1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{\alpha}{2}}$$

   La série de terme général $(n^{\frac{\alpha}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $n < -2$, par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que la série de terme général $\left(\sqrt{e^{n^{\alpha}}-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\alpha < -2$.

Corrigé de l'exercice 10

— Cas $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+n^5}}\mathrm{d}x$

Posons le changement de variable $t = \frac{x}{n}$, on a alors

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5x^5+n^5}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^5+1}}\,\mathrm{d}t$$

Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, ainsi $\sum u_n$ converge.

— Cas $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ la fonction sin est positive. De plus, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ on a $0 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$.

Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$, d'où

$$u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}$$

Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Corrigé de l'exercice 11

Rappel :

On a vu dans le cours en application des produits de Cauchy que, pour $q \in \mathbb{C}$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et que, dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

On appelle la série $\sum kq^{k-1}$ une série géométrique dérivée et la série $\sum k(k-1)q^{k-2}$ une série géométrique dérivée seconde.

Séries géométriques dérivées

On reverra ces séries et leurs sommes dans le cours sur les séries entières

1. On a $\dfrac{3^{2n+1}}{n!} = 3\dfrac{9^n}{n!}$.

   On reconnaît donc une série exponentielle de paramètre 9, qui converge, de sorte que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n}{n!} = 3e^9$.

2. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n2^{n-1} = +\infty$, la série est donc grossièrement divergente.

3. Nous reconnaissons une série exponentielle, donc convergente, de paramètre -1. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

4. On a $n\dfrac{3^n}{4^{n+1}} = \dfrac{1}{4}n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3}{16}n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$.

   Nous reconnaissons une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{3}{4} \in]-1,1[$, et donc convergente. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = 3.$$

5. On a $\dfrac{n(n-1)}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{8}n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

   Nous y voyons alors une série géométrique dérivée seconde, de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ et donc convergente. On a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

6. Pour $n \geqslant 2$ on a $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)$

   Pour $N \geqslant 2$ on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1)-\ln(n) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n)-\ln(n-1)\\ &= \ln(N+1)-\ln(2)-(\ln(N)-\ln(1))\\ &= \ln\left(\frac{N+1}{N}\right)-\ln(2)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)\end{aligned}$$

   Ainsi $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$

> **Indice**
> On ne reconnaît pas une série usuelle pourtant l'énoncé nous demande de la calculer, c'est donc qu'il s'agit d'une série télescopique

7. Pour $n \geqslant 3$ on a, par décomposition en éléments simples,

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = -\frac{5}{8(n+2)} + \frac{1}{4n} + \frac{3}{8(n-2)} = -\frac{5}{8}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)$$

   Ainsi, pour $N \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} &= -\frac{5}{8}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{8}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)\\ &= -\frac{5}{8}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{8}\frac{7}{12}+\frac{3}{8}\frac{3}{2}\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{89}{96}\end{aligned}$$

Ainsi $\sum \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{\cos(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2^n}\right)$

Comme $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$ alors $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2^n}$ est une série géométrique convergente.

Ainsi $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{2^n}$ converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2^n}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2\left(2-\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}{|2-\mathrm{e}^{i\theta}|^2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2\left(2-\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}{(2-\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2}\right) \\
&= \frac{4-2\cos(\theta)}{4-4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{4-2\cos(\theta)}{5-4\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} = \frac{4-2\cos(\theta)}{5-4\cos(\theta)}$

9. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{\cos(n\theta)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n!}\right)$

$\sum \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n!}$ est une série exponentielle convergente.

Ainsi $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n!}$ converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n!}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\exp\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\exp(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\right) \\
&= \exp(\cos(\theta))\cos(\sin(\theta))
\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} = \exp(\cos(\theta))\cos(\sin(\theta))$

10. On va supposer que $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ afin d'être sur que $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) > 0$ pour tout entier n.

Si $\theta = 0$ alors $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)\right) = 0$ pour tout entier n. La série converge alors et vaut 0.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, ainsi, pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n\ in \mathbb{N}^*$ on a

$$\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

D'où
$$\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)=\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right)-\ln\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)-\ln(2)$$

Pour $N\in\mathbb{N}$ on a alors
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)&=\ln(\cos(\theta)+\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right)-\ln\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)-\sum_{n=1}^{N}\ln(2)\\&=\ln(\cos(\theta))+\ln\left(\sin(\theta)\right)-\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2^N}\right)\right)-N\ln(2)\\&=\ln(\cos(\theta))+\ln\left(\sin(\theta)\right)-\ln\left(2^N\sin\left(\frac{\theta}{2^N}\right)\right)\end{aligned}$$

Or, puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{\theta}{2^N}=0$ on a
$$2^N\sin\left(\frac{\theta}{2^N}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}2^N\frac{\theta}{2^N}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\theta$$

Ainsi
$$\lim_{N\to+\infty}\ln(\cos(\theta))+\ln\left(\sin(\theta)\right)-\ln\left(2^N\sin\left(\frac{\theta}{2^N}\right)\right)=\ln(\cos(\theta))+\ln\left(\sin(\theta)\right)-\ln(\theta)$$

Donc la série $\sum\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)=\ln(\cos(\theta))+\ln\left(\sin(\theta)\right)-\ln(\theta)=\ln\left(\frac{\sin(2\theta)}{2\theta}\right)$$

11. φ est continue sur $[0,a]$, elle est donc intégrable sur $[0,a]$.

    Pour $t\in[0,a]$ la série $\sum t^n\varphi(t)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}t^n\varphi(t)=\frac{\varphi(t)}{1-t}$.

    La fonction $t\mapsto\frac{\varphi(t)}{1-t}$ est continue sur $[0,a]$.

    φ est bornée sur $[0,a]$ car continue, il existe donc K tel que, pour tout $t\in[0,a]$, $|varphi(t)|\leqslant K$.

    Alors $\int_0^a|\varphi(t)t^n|\,\mathrm{d}t\leqslant K\frac{a^n}{n}\leqslant Ka^n$

    La série $\sum a^n$ est une série géométrique convergente (car $a\in]0,1[$) ainsi la série $\sum\int_0^a|\varphi(t)t^n|\,\mathrm{d}t$ converge.

    On sait alors que $t\mapsto\frac{\varphi(t)}{1-t}$ est intégrable sur sur $[0,a]$ et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^a\varphi(t)t^n\,\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{\varphi(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

12. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a
$$1+\frac{2}{n(n+3)}=\frac{n(n+3)+2}{n(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$

    Ainsi $\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)=\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n+2)-\ln(n+3)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1)-\ln(n) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2)-\ln(n+3) \\
&= \ln(N+1)-\ln(1)+\ln(3)-\ln(N+3) \\
&= \ln\left(\frac{N+1}{N+3}\right)+\ln(3) \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3)
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln(3)$

Corrigé de l'exercice 12

1. L'assertion « $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n^2$ converge ; »est fausse. En effet pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ est une série alternée convergente mais $\sum u_n^2$ est la série harmonique (donc divergente).

   Par contre si on impose de plus que $(uun)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives alors l'assertion devient vraie. En effet , si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Par négligeabilité on en déduit que $\sum u_n^2$ converge.
2. L'assertion « $u_n \to 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge ; »est bien sûr fausse, il suffit de considérer la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ qui diverge alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. L'assertion « $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$ »est vraie, c'est une résultat du cours.
4. L'assertion « $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge »est fausse.

   Puisque $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{=} u_n - u_n^2 + u_n^3 + o(u_n^3)$$

   Or, si on est sûr que $\sum u_n$ converge, rien ne dit que $\sum u_n^2$ comme illustré dans le point 1..

   Reprenons notre exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ est une série alternée convergente mais

$$\frac{u_n}{1+u_n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

   D'où

$$\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{u_n}{1+u_n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

   Or les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ et $\sum o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ convergent, donc, si $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ convergeait alors $\sum \dfrac{1}{n}$ convergerait ce qui est absurde.

Corrigé de l'exercice 13

La fonction $t \mapsto \ln(t)^2$ est croissante sur $[1,+\infty[$, ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall t \in [k,k+1], \qquad \ln(k)^2 \leqslant \ln(t)^2 \leqslant \ln(k+1)^2$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$\forall k \geqslant 1, \qquad \ln(k)^2 \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)^2$$

Ainsi, en considérant cette relation au rang $k-1$ on a également

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \ln(k-1)^2 \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)^2$$

On en déduit que

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \int_{k-1}^{k} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)^2 \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

Ainsi, puisque $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)^2$, on obtient par relation de Chasles

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_1^{n} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

Or, par intégrations par parties

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t &= \left[t\ln(t)^2\right]_1^n - \int_1^n t\frac{2}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= n\ln(n)^2 - 2\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= n\ln(n)^2 - 2[t\ln(t)]_1^n + 2\int_1^n t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= n\ln(n)^2 - 2n\ln(n) + 2n - 2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)^2
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\int_2^{n+1} \ln(t)^2 \,\mathrm{d}t = (n+1)\ln(n+1)^2 - 2\ln(2)^2 - 2(n+1)\ln(n+1) + 4\ln(2) + 2n + 2 - 4 \\
\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n+1)^2 \\
\underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 \\
\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)^2
\end{aligned}$$

D'où, par construction des équivalents par encadrements, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)^2$.

Ainsi $\dfrac{1}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$. On a vu dans le 2. de l'exercice 9 que la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ converge.
Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{S_n}$ converge

---

Corrigé de l'exercice 14

1. On va procéder par intégrations par parties

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n \sin(\pi t) \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\sin(\pi t)\right]_0^1 - \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t]\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)]\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{n+1}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\cos(\pi t)\right]_0^1 - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

2. On a de plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+2}| \leqslant \int_0^1 |t^{n+2}\sin(\pi t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+3}$$

En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = 0$, i.e. $u_{n+2} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. D'où

$$u_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 u_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 o(1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $t \in [0,1]$, $t^n \sin(\pi t) \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$.

Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs on en déduit que $\sum u_n$ converge.

On pourrait aller plus loin ici :

— La fonction $S : t \mapsto \dfrac{\sin(\pi t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(\pi t)$ est continue sur $[0,1[$.

— Les fonctions $t \mapsto t^n \sin(\pi t)$ sont intégrables sur $[0,1[$.

— La série $\sum \int |t^n \sin(\pi t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi S est intégrable sur $[0,1[$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$

Par contre cette dernière intégrale ne peut pas se calculer avecl es fonctions usuelles.

Corrigé de l'exercice 15

1. Notons que $\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ et puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Et donc $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

Mais la série de terme général $-\dfrac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente, et donc, d'après le critère des équivalents pour les série de signe constant, $\sum u_n$ converge également.

$-\dfrac{1}{2n^2}$ est de signe constant, donc le critère s'applique.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(n).\end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $i = k-1$.

3. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n} u_k + \frac{1}{1} + \ln(n)$.

   Mais $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k + 1 \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k + 1$.

   Notons donc $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$.

   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   Enfin, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, $\gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} o(\ln n)$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Corrigé de l'exercice 16

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ diverge, i.e. la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. Considérons $f : t \mapsto \dfrac{t}{4t^{-}1}$. f est dérivable sur $[1, +\infty[$, et, pour $t \geqslant 1$ on a $f'(t) = \dfrac{4t^2 - 1 - 8t^2}{(4t^2-1)^2} = -\dfrac{4t^2+1}{(4t^2-1)^2} < 0$.

   Ainsi f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n u_{n+1} < 0$.

   D'après le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

3. On a
$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1} = \frac{a(2k-1) + b(2k+1)}{4k^2-1} = \frac{2(a+b)k + b - a}{4k^2-1}.$$
   On souhaite donc avoir $\forall k \in \mathbb{N}$, $2(a+b)k + b - a = k$.
   Mais deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs si et seulement si ils sont égaux, et donc $a + b = \dfrac{1}{2}$ et $b - a = 0$.

   La seule solution est donc $a = b = \dfrac{1}{4}$.

4. D'après la question précédente, on a
$$\frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{4}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}\right).$$
   Enfin, notons que $2(k+1) - 1 = 2k+1$, et donc nous avons affaire à une série télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)-1}-\frac{(-1)^k}{2k-1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\lim_{k\to+\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}-\frac{(-1)^1}{2-1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}=\frac{1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 17

1. On a

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(n)+a\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+b\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n)+a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+b\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n)+\frac{a+2b}{n}-\frac{a+4b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Si $1+a+b\neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1+a+b)\ln(n)$ et donc $\sum u_n$ diverge.
Une condition nécessaire pour que $\sum u_n$ converge est donc déjà $a+b=-1$.

Si c'est le cas et que $a+2b\neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a+2b}{n}$ et donc, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge.
Il faut donc avoir de plus $a+2b=0$.
Or, $\begin{cases}a+b=-1\\ a+2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$
Et alors, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$, de sorte que, toujours par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.
Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

2. On a alors, pour $N\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}u_k &= \sum_{k=1}^{N}\ln(k)-2\sum_{k=1}^{N}\ln(k+1)+\sum_{k=1}^{N}\ln(k+2)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\ln(k)-2\sum_{k=2}^{N+1}\ln(k)+\sum_{k=3}^{N+2}\ln(k)\\ &= -\ln(N+1)-\ln(2)+\ln(N+2)=\ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right)-\ln(2)\\ &\underset{n\to+\infty}{\to} -\ln(2).\end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=-\ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 18

1. Pour tout entier naturel n, f_n est continue sur $]0,1]$.
   Pour $n=0$ f_0 est la fonction ln, on a vu en cours qu'elle était intégrable sur $]0,1]$.
   Pour $n \geqslant 1$ on a $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t)=0$ par croissance comparée. La fonction f_n est alors prolongeable par continuité en 0 et donc est intégrable sur $]0,1]$
   De plus,pour $x\in]0,1]$, par intégration par parties :
   $$\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1}dt = -\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$
   On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $I_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
2. Posons $f : t\mapsto \mathrm{e}^t \ln(t)$. f est continue sur $[0,1[$.
   On sait que
   $$\forall t\in\mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$
   Ainsi, pour tout $t\in]0,1]$,
   $$f(t) = \mathrm{e}^t \ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$$
   Les fonctions $t\mapsto \dfrac{t^n\ln(t)}{n!} = \dfrac{f_n(t)}{n!}$ sont intégrables sur $]0,1]$. De plus, pour $n\in\mathbb{N}$ on a
   $$\int_0^1 \left|\frac{t^n\ln(t)}{n!}\right| \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^n\ln(t)}{n!}\mathrm{d}t = -\frac{I_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)^2 n!} = \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$
   Ainsi la série $\sum \int_{]0,1]} |f_n|$ converge.
   On en déduit alors que f est intégrable et que
   $$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^n\ln(t)}{n!}\quad t == \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+1)\times(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$$

Corrigé de l'exercice 19

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Pour $x\geqslant 0$ on a
   $$f_n'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$$
   On en déduit le tableau de variations suivant

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection continue, elle établit une bijection de $[1,+\infty[$ vers $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$. En particulier elle s'annule une unique fois sur cet intervalle en $x_n = f_n^{-1}(0)$.

Puisque, pour $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \leqslant -\frac{1}{2} < 0$, on en déduit que f s'annule en un unique réel positif x_n. On a de plus $x_n > 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $nx_n^{n+1} - (n+1)x_n^n = \frac{1}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= (n+1)x_n^{n+2} - (n+2)x_n^{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= (n+1)x_n^{n+2} - (n+2)x_n^{n+1} - nx_n^{n+1} + (n+1)x_n^n \\ &= x_n^n\left((n+1)x_n^2 - (2n+2)x_n + (n+1)\right) \\ &= (n+1)x_n^n\left(x_n^2 - 2x_n + 1\right) \\ &= (n+1)x_n^n\left(x_n - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $f_{n+1}(x_n) > 0$. La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, $f_{n+1}(x_n) > 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, d'où $x_{n+1} \leqslant x_n$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante, elle est de plus minorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $nx_n^{n+1} - (n+1)x_n^n - \frac{1}{2} = 0$, d'où $nx_n^{n+1} = \frac{1}{2} + (n+1)x_n^n$ et donc

$$x_n = \frac{1}{2nx_n^n} + \frac{n+1}{n}$$

Or $x_n \geqslant 1$ ainsi $2nx_n^n \geqslant 2n$, d'où

$$1 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{n+1}{n}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Corrigé de l'exercice 20

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, la suite u_n est donc décroissante.

Montrons par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$

Initialisation :

On a $u_0 \in]0,1[$ par définition

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \in]0,1[$, alors $0 < u_n^2 < u_n$, ainsi

$$0 < u_n - u_n^2 < u_n < 1$$

D'où $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

De plus, par continuité de la fonction $t \mapsto t - t^2$ on a $\ell = \ell - \ell^2$, d'où $\ell = 0$.

Finalement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Lire l'énoncé

Ce résultat était prévisible puisqu'on nous demande par la suite d'étudier les séries $\sum u_n^2 et \sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeait pas vers 0 ces deux séries seraient grossièrement divergente et l'exercice plié en moins de 5 minutes.

2. Soit $N \in N$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = \sum_{n=0}^{N} u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$$

Ainsi la série $\sum u_n^2$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $u_n \in]0,1[$ ainsi la quantité $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est bien définie.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$
   Ainsi $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. De plus, par décroissance dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $-\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$.

   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n$ ont même nature.
4. Pour $N \in \mathbb{N}$ on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \sum_{n=0}^{N} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\\ &= \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\end{aligned}$$
   Ainsi $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 21

1. On a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge. Ainsi la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$

   Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-1)^{-n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= [\arctan(t)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Interversion

   Pas de problème ici pour intervertir la somme et l'intégrale car la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes

   (b) Du calcul précédent on déduit que
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{\pi}{4}\right| &= \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{\pi}{4} = 0$, en d'autres termes $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$

3. La question précédente nous assure que $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$. D'où

$$\left|4\sum_{k=0}^{n} u_k - \pi\right| \leqslant \frac{4}{2n+3}$$

Ainsi $4\sum_{k=0}^{n} u_k$ est une approximation de π à une précision d'au mois 10^{-2} lorsque $\frac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-2}$

C'est-à-dire lorsque $2n+3 \geqslant 400$ ou encore $n \geqslant \frac{397}{2}$.

Finalement, pour obtenir une approximation de π à 10^{-2} près, il faut calculer au mois 199 termes

---

Corrigé de l'exercice 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left((-1)^k\mathrm{e}^{ikt}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{e}^{ikt}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(-\mathrm{e}^{it}\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{int}}{1+eit}\right)\\
&= -\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{1+e^{i(n+1)\pi}\mathrm{e}^{int}}{1+eit}\right)\\
&= -\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{nt+(n+1)\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{nt+(n+1)\pi}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{nt+(n+1)\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}}\right)\\
&= -\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)t+(n+1)\pi}{2}}\,\frac{\cos\left(\frac{nt+(n+1)\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&= -\frac{\cos\left(\frac{(n+1)t+(n+1)\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{nt+(n+1)\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= -\frac{\cos\left(\frac{(n+1)t+(n+1)\pi}{2}+\frac{nt+(n+1)\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{(n+1)t+(n+1)\pi}{2}-\frac{nt+(n+1)\pi}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= -\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}+(n+1)\pi\right)+\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= -\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}+(n+1)\pi\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\\
&= -\frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

2. Les fonctions f et $h : t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, le théorème d'intégration par

parties permet d'écrire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi f\left(t\right) h'\left(t\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[f(t)g(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'\left(t\right)h\left(t\right)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'\left(t\right)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Et donc, par inégalité triangulaire

$$0 \leqslant \left|\int_0^\pi f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left|\int_0^\pi f'\left(t\right)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or f' est continue sur $[0,\pi]$, elle y est donc bornée. Soit $K>0$ tel que

$$\forall t \in [0,\pi], \qquad |f'(t)| \leqslant K$$

Alors

$$0 \leqslant \left|\int_0^\pi f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K\pi}{\lambda}$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Classique

Ce résultat, connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue est assez classique, il est bon de l'avoir déja vu et de savoir le reprouver.

3. On a, pour $t \neq \pi$, $\dfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{t-\pi} = \dfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t-\pi}$

On reconnaît là un taux d'accroissement de la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ entre π et t. Ainsi

$$\lim_{t\to\pi}\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t-\pi} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ainsi

$$\lim_{t\to\pi}\frac{\pi-t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 2$$

g est donc bien prolongeable par continuité en π.

Pour $t \in [0,\pi[$ on a

$$g'(t) = -\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)x - \pi\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)x - \pi\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\cos(t)}$$

D'où, pour $x \in]0,\pi]$ on a

$$\begin{aligned}g'(\pi-s) &= \frac{-\sin\left(\frac{\pi-s}{2}\right)\,(\pi-s) + \pi\sin\left(\frac{\pi-s}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi-s}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi-s}{2}\right)^2}\\ &= -\frac{s\,\sin\left(\frac{s-\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{s-\pi}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{s-\pi}{2}\right)^2}\\ &= -\frac{-s\,\cos\left(\frac{s}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)^2}\\ &\underset{s\to0}{=} \frac{s\left(1-\frac{s^2}{8}+o(s^2)\right) - 2\left(\frac{s}{2}-\frac{s^3}{48}+o(s^3)\right)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)^2}\\ &\underset{s\to0}{=} \frac{s-\frac{s^3}{8}-s+\frac{s^3}{24}+o(s^3)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)^2}\\ &\underset{s\to0}{=} \frac{-\frac{s^3}{12}+o(s^3)}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)^2}\\ &\underset{s\to0}{\sim} \frac{-\frac{s^3}{12}}{2\frac{s^2}{4}}\\ &\underset{s\to0}{\sim} -\frac{s}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{s\to 0} g'(\pi - s) = 0$, d'où $\lim_{t\to\pi} g'(t) = 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée g est alors prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sum_{k=1}^n (-1)^k(\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\left[\frac{(\pi - t)\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \left(-(-1)^k + 1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{-1 + (-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

Or $-1 + (-1)^k = 0$ si k est pair et $-1 + (-1)^k = -2$ si k est impair, ains, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k(\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = -2\sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or, d'après la question 1., on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sum_{k=1}^n (-1)^k(\pi - t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi -\frac{\pi - t}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)(\pi - t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{t - \pi}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{(-1)^n}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{(t-\pi)^2}{4} \right]_0^\pi + \frac{(-1)^n}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi^2}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où

$$-2\sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)^2} = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{4n+3}{2}t\right) g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a montré que g est de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi, d'après la question 2.

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 \cos\left(\frac{4n+3}{2}t\right) g(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\lim_{p\to+\infty} -2\sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

C'est-à-dire

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

soit $N \in \mathbb{N}$, on a, en séparant les indices pairs et impairs,

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^N \frac{1}{(k^2}$$

Les séries $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ convergent, on peut donc faire tendre N vers$+\infty$ dans cette égalité, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Enfin !

On aboutit bien au résultat que l'on connaît. Vous pouvez également vous rendre compte que, s'il n'est pas difficile de montrer que les séries de Riemann convergent, il est nettement plus long d'obtenir leurs valeurs.